Guía de Trabajo

Nombre: ____ Curso: _________

Objetivo: Comprender y aplicar la adición, sustracción, multiplicación y división de sucesiones.

En la siguiente guía, se realiza la continuación de la guía anterior, donde se trabajó el concepto de sucesión. En esta ocasión se trabajarán las operaciones aplicables a las sucesiones. A modo de resumen para que tengan una idea simple de la guía, cada operación se realiza por orden de cada término, es decir, *"el primero con el primero, el segundo con el segundo…"* y así sucesivamente. Esto es válido para cada operación.

2.4. Adición y sustracción de sucesiones

La adición o la sustracción de las sucesiones a_n y b_n, es una operación que nos permite encontrar otra sucesión, cuyos términos son la suma o diferencia de los términos correspondientes.

Es decir, si tenemos las sucesiones:

$$a_n = a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$$
$$b_n = b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$$

entonces,

$$\boxed{a_n \pm b_n = (a_1 \pm b_1), (a_2 \pm b_2), (a_3 \pm b_3), \dots, (a_n \pm b_n)}$$

$a_n \pm b_n$ es una sucesión obtenida por la adición o sustracción de las sucesiones a_n y b_n.

204

Ejemplo

- Sumemos y restemos las sucesiones cuyos términos generales son:

$a_n = 4n$ y $b_n = \dfrac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$

Adición	Sustracción
$a_n + b_n = 4n + \dfrac{n}{n+1}$	$a_n - b_n = 4n - \dfrac{n}{n+1}$
$a_n + b_n = \dfrac{4n^2 + 4n + n}{n+1}$	$a_n - b_n = \dfrac{4n^2 + 4n - n}{n+1}$
$\mathbf{a_n + b_n = \dfrac{4n^2 + 5n}{n+1}}$	$\mathbf{a_n - b_n = \dfrac{4n^2 + 3n}{n+1}}$
Luego, para $n = 1$	Luego, para $n = 1$
$a_n + b_n = \dfrac{4 \cdot (1)^2 + 5 \cdot 1}{1+1}$	$a_n - b_n = \dfrac{4 \cdot (1)^2 + 3 \cdot 1}{1+1}$
Así:	Así:
$\mathbf{a_n + b_n = \dfrac{9}{2}, \dfrac{26}{3}, \dfrac{51}{4}, \dfrac{84}{5}, \ldots}$	$\mathbf{a_n - b_n = \dfrac{7}{2}, \dfrac{22}{3}, \dfrac{45}{4}, \dfrac{76}{5}, \dfrac{115}{6}, \ldots}$

2.5. Multiplicación de sucesiones

La multiplicación de las sucesiones a_n y b_n es una operación que nos permite encontrar otra sucesión cuyos términos son el producto de los términos correspondientes.

Es decir, si $a_n = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$

$b_n = b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$

entonces: $\boxed{a_n \cdot b_n = a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, a_3 \cdot b_3, \ldots, a_n \cdot b_n}$

Ejemplo

- Multipliquemos las sucesiones $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ y $b_n = \dfrac{n+1}{n+3}$, $n \in \mathbb{N}$.

Sea: $a_n \cdot b_n = \dfrac{n}{\cancel{n+1}_{1}} \cdot \dfrac{\cancel{n+1}^{1}}{n+3} = \dfrac{n}{n+3}$

$$\boxed{a_n \cdot b_n = \dfrac{n}{n+3}}$$

Luego, para $n = 1,2,3,4, \ldots$

$a_1 \cdot b_1 = \dfrac{1}{1+3} = \dfrac{1}{4}$

$a_2 \cdot b_2 = \dfrac{2}{2+3} = \dfrac{2}{5}$

$a_3 \cdot b_3 = \dfrac{3}{3+3} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

$a_4 \cdot b_4 = \dfrac{4}{4+3} = \dfrac{4}{7}$

Así:

$$a_n \cdot b_n = \frac{n}{n+3} = \frac{1}{1+3}, \frac{2}{2+3}, \frac{3}{3+3}, \frac{4}{4+3}, \ldots$$

Por lo tanto: $\mathbf{a_n \cdot b_n = \dfrac{1}{4}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{4}{7}, \ldots}$

El conjunto S_n de las sucesiones con la adición $\{S_n, +\}$, constituye un **Grupo Abeliano,** ya que cumple las siguientes propiedades:

a. Clausura

$(a_n + b_n) \in S_n$

b. Asociatividad

$(a_n + b_n) + c_n = a_n + (b_n + c_n)$

c. Existencia de un único elemento neutro

El neutro para la adición de sucesiones es la sucesión cero, $a_0 = 0,0,0,\ldots,0$ de modo que:

$a_n + a_0 = a_0 + a_n = a_n$

d. Existencia de un único elemento opuesto para cada sucesión

La sucesión $(-a_n)$ es la opuesta de la sucesión a_n ya que:

$(-a_n) + a_n = a_n + (-a_n) = a_0$

e. Conmutatividad

$a_n + b_n = b_n + a_n$

En el conjunto S_n de las sucesiones con la multiplicación, $\{S_n, \cdot\}$, se verifican las siguientes propiedades:

a. Clausura

$(a_n \cdot b_n) \in S_n$

b. Asociatividad

$(a_n \cdot b_n) \cdot c_n = a_n \cdot (b_n \cdot c_n)$

c. Existencia de un único elemento neutro

El neutro para la multiplicación de sucesiones es la sucesión unidad $a_1 = 1,1,1,\ldots,1$, de modo que:

$a_n \cdot a_1 = a_1 \cdot a_n = a_n$

d. Conmutatividad

$a_n \cdot b_n = b_n \cdot a_n$

Observa que en el conjunto S_n **no existe un inverso multiplicativo para cada uno de sus elementos,** por lo cual $\{S_n, \cdot\}$ **no constituye** una estructura de Grupo.

Además en $\{S_n, +, \cdot\}$ se cumple:

e. Distributividad de la multiplicación respecto de la adición

$a_n \cdot (b_n + c_n) = a_n \cdot b_n + a_n \cdot c_n$

$(b_n + c_n) \cdot a_n = b_n \cdot a_n + c_n \cdot a_n$

2.6. División de sucesiones

La división de las sucesiones a_n y b_n con $b_n \neq b_0$, es una operación que nos permite encontrar otra sucesión cuyos términos son los cuocientes de los términos respectivos.

Es decir, si
$$a_n = a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$$
$$b_n = b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$$

entonces:
$$\boxed{\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n}}$$

En razón de las propiedades que cumplen la adición y la multiplicación en el conjunto S_n, se puede afirmar que $(S_n, +, \cdot)$ **constituye una estructura de Anillo Conmutativo con Unidad,** donde el elemento unidad es el neutro multiplicativo.

Ejemplo

- Efectuemos la división de las sucesiones $a_n = n + 1$ y $b_n = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$

Calculando el cuociente: $\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{n+1}{\frac{1}{n}} = n(n+1)$

obtenemos: $\boxed{\dfrac{a_n}{b_n} = n^2 + n}$

Luego, para n = 1,2,3,4,5, ...

$$\frac{a_n}{b_n} = n^2 + n = 1^2 + 1\ ,\ 2^2 + 2\ ,\ 3^2 + 3\ ,\ 4^2 + 4\ ,\ 5^2 + 5\ , \dots$$

Por lo tanto: $\dfrac{a_n}{b_n} = \mathbf{2, 6, 12, 20, 30, \dots}$

Si $a_n = n + 1$ y $b_n = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$

$a_n = 2, 3, 4, 5, 6, \dots$

$b_n = 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \dots$

$\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{2}{1}, \dfrac{3}{\frac{1}{2}}, \dfrac{4}{\frac{1}{3}}, \dfrac{5}{\frac{1}{4}}, \dfrac{6}{\frac{1}{5}}, \dots$

$\dfrac{a_n}{b_n} = 2, 6, 12, 20, 30, \dots$

EJERCICIOS — **OPERACIONES CON SUCESIONES**

1. Sean dos sucesiones: $a_n = 2n + 3$ y $b_n = 3n - 1$. Encuentra la sucesión $(a_n + b_n)$ y calcula sus cinco primeros términos.

2. Sean dos sucesiones: $a_n = 4n - 5$ y $b_n = 2(n - 1)$. Encuentra la sucesión $(a_n - b_n)$ y calcula sus seis primeros términos.

3. Dadas las sucesiones $a_n = \dfrac{2n+1}{n}$ y $b_n = \dfrac{n-1}{n+1}$, encuentra los cinco primeros términos de:

   i. a_n ii. b_n iii. $a_n + b_n$ iv. $a_n \cdot b_n$

4. Dados a_n y b_n del ejercicio anterior, encuentra el término general de:

   i. $a_n + b_n$ ii. $a_n - b_n$

5. Dadas las sucesiones $a_n = \dfrac{n^2 - 1}{n}$ y $b_n = \dfrac{n}{n+1}$, encuentra el término general de:

   i. $a_n \cdot b_n$ ii. $\dfrac{a_n}{b_n}$